

Chapitre 1 | Systèmes d'équations linéaires (SEL)

1

Dans cette séance, on va apprendre

- (i) reconnaître un SEL et l'écrire sous forme matricielle;
- (ii) représenter graphiquement les solutions d'un SEL (avec 2 variables);
- (iii) la notion de SEL équivalents et les opérations élémentaires sur les lignes;
- (iv) les SEL incompatibles et compatibles, déterminés et indéterminés.

2.6 + 1.3 (début) Généralités

Déf 1.2 Un système d'équations linéaires (SEL) [aussi, système linéaire] en les variables $x_1, \dots, x_n$ est une famille d'équations du type

$$(*) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m, \end{cases} \quad \text{où } a_{i,j} \in \mathbb{R} \text{ et } b_i \in \mathbb{R} \text{ pour tout } i \in [1, m] \text{ et } j \in [1, n]$$

lignes = éq. nombres fixes

coefficients du SEL second membre

On dit que c'est un SEL de taille $m \times n$

Notation: On écrit souvent ∇ $a_{i,j}$ au lieu de $a_{i,j} = 0$

$\uparrow$ # variables
 $\uparrow$ # équations

Notation

$[a, b] = \{i \in \mathbb{Z} : a \leq i \leq b\}$

Exemple A $(*) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 = -3, \end{cases}$ est un SEL de taille 2×2

Déf 1.4 Étant donné le SEL $(*)$ dans la Déf. 1.2, une solution est un n -uplet $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait toutes les équations dans $(*)$, i.e. on a les identités dans $\mathbb{R}$:

1ère coordonnée $\uparrow$ même coordonnée

$$\begin{cases} a_{1,1}s_1 + \dots + a_{1,n}s_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m,1}s_1 + \dots + a_{m,n}s_n = b_m, \end{cases}$$

On notera $S_{(*)}$ l'ensemble formé de toutes les solutions $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ de $(*)$

Dans ce cas on dit que $(*)$ est

(i) incompatible si $S_{(*)} = \emptyset$ i.e. il n'y a aucune solution ?

(ii) compatible si $S_{(*)} \neq \emptyset$ i.e. il y a au moins une solution ?

Motivation fondamentale de l'algèbre linéaire

= calculer l'ensemble de solutions d'un SEL (en particulier, déterminer si c'est incompatible ou compatible)

Exemple 1.5 | Le SEL de taille 2×2

$$(*) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

est incompatible ∇ $\leftarrow$ Il n'y a aucune solution.

Exemple A (suite) | Le SEL de taille 2×2

$$(*) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$$

est compatible. En effet, $(1, -2)$ est une solution de $(*)$.

Comment ai-je trouvé ça? y a-t-il d'autres solutions?

Si l'on fait la 1ère éq. moins la 2ème, on trouve que toute solution de $(*)$ doit satisfaire

$$2x_1 = -1 - (-3) = 2$$

ce qui nous la 1ère coordonnée de n'importe quelle solution de $(*)$ est 1.

La 2ème éq. dans $(*)$ nous dit alors que

$$1 + 2x_2 = -3 \Rightarrow 2x_2 = -3 - 1 = -4$$

ce qui nous dit que la 2ème coordonnée de n'importe quelle solution de $(*)$ est -2.

En conséquence on a une et une seule solution de $(*)$, i.e. $S_{(*)} = \{(1, -2)\}$.

Exemple 1.6 | Le SEL de taille 2×2

$$(*) \quad x_1 + x_2 = 1$$

est compatible. En effet $(1, -2)$ est (aussi) une solution de $(*)$.

Mais on a aussi que $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(3, -2)$, ... sont des solutions de $(*)$.

En fait, on peut réécrire $(*)$ sous la forme $x_1 = 1 - x_2$, ce qui nous dit que $(1 - s_2, s_2)$ est une solution de $(*)$ pour tout $s_2 \in \mathbb{R}$.

En conséquence, $(*)$ admet une infinité de solutions différentes, qui donnent

$$S_{(*)} = \{(1 - s, s) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Thm 1.7 | Si un SEL (*) possède au moins une solution (i.e. il est compatible) 2
 alors il possède exactement une solution ou il possède une infinité de solutions
 différentes.

Appelé Thm 0, 1, ∞.

(Preuve) Soient $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(s'_1, \dots, s'_n) \in \mathbb{R}^n$ deux solutions différentes de (*).
 Il suffit de montrer qu'il existe une quantité infinie de solutions différentes.
 Pour le voir, comme $(s_1, \dots, s_n)$ et $(s'_1, \dots, s'_n)$ sont différents, il existe un indice $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $s_i \neq s'_i$. On suppose s.p.d.g. ~~que~~ ^{sans perte de généralité} $i=1$. Alors, on affirme que

$$(ts_1 + (1-t)s'_1, \dots, ts_n + (1-t)s'_n) \in S_{(*)} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

En effet, la j -ème ligne de (*) devient

$$\begin{aligned} & a_{j,1}(ts_1 + (1-t)s'_1) + \dots + a_{j,n}(ts_n + (1-t)s'_n) \\ &= t a_{j,1}s_1 + (1-t)a_{j,1}s'_1 + \dots + t a_{j,n}s_n + (1-t)a_{j,n}s'_n \\ &= t \underbrace{(a_{j,1}s_1 + \dots + a_{j,n}s_n)}_{b_j} + (1-t) \underbrace{(a_{j,1}s'_1 + \dots + a_{j,n}s'_n)}_{b_j} \\ &= t b_j + (1-t)b_j = b_j, \text{ pour tout } j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \end{aligned}$$

car $(s_1, \dots, s_n) \in S_{(*)}$
 et $(s'_1, \dots, s'_n) \in S_{(*)}$

i.e. $(ts_1 + (1-t)s'_1, \dots, ts_n + (1-t)s'_n) \in S_{(*)}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Comme $ts_1 + (1-t)s'_1 \neq t's_1 + (1-t')s'_1$ si $t \neq t'$, alors

$$\underbrace{\{(ts_1 + (1-t)s'_1, \dots, ts_n + (1-t)s'_n) : t \in \mathbb{R}\}}_{\text{infini}} \subseteq S_{(*)} \Rightarrow S_{(*)} \text{ infini. } \square$$

Déf. 1.4 (suite) | Un SEL compatible (*) est dit

(a) déterminé si $\#(S_{(*)}) = 1$

(b) indéterminé si $\#(S_{(*)}) > 1$ ($\Rightarrow \#(S_{(*)}) = \infty$).

(suite)

§1.3. Représentation et résolution graphique d'un SEL à 2 variables

On va considérer un SEL de taille $m \times 2$

$$(*) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 = b_m, \end{cases}$$

Point

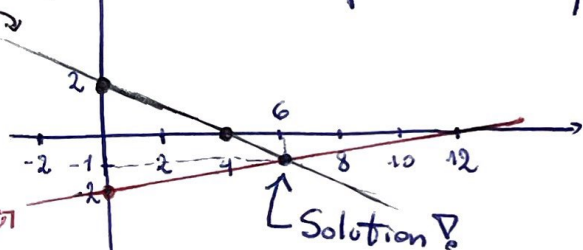
fondamental:

chaque éq. $|a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 = b_j|$ est une droite
donc $S_{(*)}$ est une intersection de droites !

Exercice 3

$$(*) \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - 3x_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 = 4, \end{cases}$$

Pour dessiner chaque droite il suffit de trouver 2 points sur chaque droite !



Pour dessiner $x_1 + 2x_2 = 4$ par exemple, on fixe $x_1 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow (0, 2)$ est sur la droite.

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow (4, 0)$ est sur la droite.

(C'est pareil pour l'autre droite).

De façon analytique, pour résoudre $(*)$ on peut faire la 1ère éq. moins $\frac{1}{2}$ fois la 2ème, ce qui donne

$$-3x_2 - x_2 = 6 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 4 \Rightarrow -4x_2 = 4 \Rightarrow \underline{x_2 = -1}$$

Si l'on remplace cette valeur dans la 2ème éq. on trouve

$$x_1 + 2 \cdot (-1) = 4 \Rightarrow \underline{x_1 = 6}$$

§1.4. SEL équivalents et opérations sur les lignes

Déf 1.12 | Étant donné le SEL $(*)$ dans la Déf. 1.2, on définit les opérations suivantes (où $i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket$)

(OEL I) On échange les lignes L_i et L_j dans $(*)$;

(OEL II) On multiplie la ligne L_i par $\lambda \in \mathbb{R}^*$;

(OEL III) On remplace la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $j \neq i$.

Notation abrégée

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

$$L_i \leftarrow \lambda L_i$$

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$$

Ces opérations sont appelées opérations élémentaires sur les lignes (OEL) et [3] produisent un nouveau SEL si l'on les applique sur un SEL quelconque. La taille du SEL ne change pas.

Deux SEL $(*)$ et $(*)'$ sont équivalents (seules les lignes), ou (ligne-)équivalents si l'on peut obtenir $(*)'$ à partir d'une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes commençant par $(*)$, i.e.
 $(*) \xrightarrow{OEL_1} \dots \xrightarrow{OEL_p} (*)'$, où $OEL_1, \dots, OEL_p$ sont des opérations (OEL.I)-(OEL.III).

[R.K.A] Les opérations élémentaires (OEL.I)-(OEL.III) sont inversibles et les inverses sont des opérations élémentaires sur les lignes:

$(*) \xrightarrow{O} (*)'$ est une opération élémentaire sur les lignes

Exemples

(i) $(L_i \leftrightarrow L_j)^{-1} = L_i \leftrightarrow L_j$

(ii) $(L_i \leftarrow \lambda L_i)^{-1} = L_i \leftarrow \lambda^{-1} L_i$

(iii) $(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j)^{-1} = L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$

[O inversible] $(*) \xleftarrow{O^{-1}} (*)'$ est une opération élémentaire sur les lignes

Thm 1.14 Soient $(*)$ et $(*)'$ deux SEL ligne-équivalents.

Alors $S_{(*)} = S_{(*)'}$.

(Preuve) Il suffit de montrer que, si $(*) \xrightarrow{O} (*)'$ est une opération élémentaire sur les lignes (OEL.I)-(OEL.III), alors $S_{(*)} \subseteq S_{(*)'}$. Cela suit des définitions (OEL.I)-(OEL.III). En effet, (OEL.I) ne change pas l'ensemble des solutions, car on interchange deux lignes. De même, si $(s_1, \dots, s_n) \in S_{(*)}$ et l'on applique (OEL.II) (resp. (OEL.III)), alors

$$(\lambda a_{i,1}s_1 + \dots + \lambda a_{i,n}s_n = \lambda b_i) \quad (\text{resp.} \quad \underbrace{a_{i,1}s_1 + \dots + a_{i,n}s_n + \lambda(a_{j,1}s_1 + \dots + a_{j,n}s_n)}_{(a_{i,1} + \lambda a_{j,1})s_1 + \dots + (a_{i,n} + \lambda a_{j,n})s_n} = b_i + \lambda b_j)$$

i.e. $(s_1, \dots, s_n) \in S_{(*)'}$.

cela veut dire que
 $a_{k,1}s_1 + \dots + a_{k,n}s_n = b_k, \forall k \in [1, m] \quad \nabla$

□

[R.K.B] On a utilisé ces OEL pour résoudre des SEL ∇

On peut toujours résoudre un SEL en effectuant des OEL } MÉTHODE DE GAUSS-JORDAN (à venir)

Exemple 1.15

$$(*) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 6x_1 + 12x_2 + 6x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 5, \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 5, \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ \rightarrow \end{array} \begin{cases} \cancel{0}x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ \cancel{0}x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 5, \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_2 - 5x_3 = 5, \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_2 - 5x_3 = 5, \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ \rightarrow \end{array} \begin{cases} x_1 + \cancel{0}x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = -1, \\ \cancel{0}x_2 - 3x_3 = 7, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow (-\frac{1}{3})L_3} \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = -1, \\ x_3 = -\frac{7}{3}, \end{cases} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}} \begin{cases} x_1 + \cancel{0}x_3 = \frac{27}{3}, \\ x_2 + \cancel{0}x_3 = -\frac{10}{3}, \\ x_3 = -\frac{7}{3}. \end{cases}$$

Alors

$$S_{(*)} = \left\{ \left(\frac{27}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{7}{3} \right) \right\}.$$

THM 1.14